数理解析研究所講究録
245巻 1975年 89-96

トーラス上のあるエルゴード系

名大養　大和一夫

§1. Introduction

測度を保つ smooth な discrete 力学系について考える。

よく知られているように Anosov の力学系はエルゴード性をもち、更にそのエルゴード性は small perturbation によって不変である。Anosov 力学系の example は n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ 上の自己同型として、$\mathbb{R}^n$ の hyperbolic 線型変換（その固有値の絶対値がどれも 1 に等しくない）からひきおこされるものによって与えられる。

そこで、$\mathbb{R}^n$ の quasi-hyperbolic な線型変換（その固有値のひとつは 1 に等しく、残り $(n-1)$ 個の固有値の絶対値はどれも 1 に等しくない）からひきおこされる $\mathbb{T}^n$ の自己同型（それ自身はつまらないがその generically perturbed system）がどの程度 Anosov 系に似た性質をもつかを考える。

我々の結果は次の様になる：3次元の場合（$n>3$ でも多分同様），quasi-hyperbolic $\phi_0 : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ の generically perturbed system ϕ はエルゴード性をもち，

small perturbation で不変である．更に §4 では ϕ が almost Anosov という性質をもつかどうかについて考える．

§2. perturbed system ϕ に associate した splitting $C\oplus D\oplus E$.

以下，簡単のため $n=3$ とする．$\mathbb{T}^3=\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ と考え，その点（の座標）を (x,y,z) とあらわす．$\phi_0:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ を

$$\phi_0=\alpha\times id:\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^1,$$

ここで $\alpha:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の hyperbolic 線型変換からひきおこされるもの．（固有値 c, d, $0<c<1<d$, とする）

id は $\mathbb{T}^1$ の恒等写像．

とする．このとき $\mathbb{T}^3$ の tangent bundle は

$$T\mathbb{T}^3=C_0^1\oplus D_0^1\oplus E_0^1$$

と split して，$\phi_{0*}:T\mathbb{T}^3\to T\mathbb{T}^3$ によって

$$C_0\to C_0\ ,\ D_0\to D_0\ ,\ E_0\to E_0$$

がひきおこされ

$$\|\phi_{0*}v\|=c\|v\|\quad\text{for } v\in C_0\ ,$$
$$\|\phi_{0*}v\|=d\|v\|\quad\text{for } v\in D_0\ ,$$
$$\|\phi_{0*}v\|=\|v\|\quad\text{for } v\in E_0\ .$$

さて，$\varepsilon>0$ を，$0<c+\varepsilon<1<d-\varepsilon$ をみたすようにとる．$\phi:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ を ϕ_0 に十分近い（C^2-topology）diffeomorphism で volume $dxdydz$ を保つとする．

Lemma 1. perturbed system ϕ に対して,

$$T\mathbb{T}^3 = C^1 \oplus D^1 \oplus E^1 \quad (\text{continuous})$$

と split して, $\phi_* : T\mathbb{T}^3 \to T\mathbb{T}^3$ によって

$$C \to C \ , \ D \to D \ , \ E \to E$$

がひきおこされ,

$$\|\phi_* v\| < (c+\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in C \ ,$$

$$\|\phi_* v\| > (d-\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in D \ ,$$

$$(c+\varepsilon)\|v\| < \|\phi_* v\| < (d-\varepsilon)\|v\| \quad \text{for } v \in E \ .$$

さらに、この splitting は ϕ に連続的に depend する.

Remark 1. line fields C, D は共に $\mathbb{T}^3$ 上の dimension 1 の foliation を定義する. すなわち $\mathbb{T}^3$ の点に対して, その点をとおる, C (or D) の積分曲線 (leaf) が一意的に存在する. そして C の各 leaf ($\mathbb{R}^1$ に同型) は ϕ の一般化された安定多様体になる. D の方についても同様. また, C, D は Anosov の意味で absolutely continuous.

Definition 1. continuous 2-plane field $C \oplus D$ が点 $p \in \mathbb{T}^3$ で non-integrable とは

$^\exists \Delta : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{T}^3$ continuous imbedding

(i) $\Delta((0,0)) = p$,

(ii) $\Delta([0,1] \times 0)$: C のある leaf に含まれる,

(iii) $\Delta(1 \times [0,1])$: D のある leaf に含まれる,

(iv) $^{\forall}t \in [0,1]$ に対して、$\Delta([0,1]\times t)$ は C のある leaf に含まれる。

(V) $^{\exists}\Gamma : \mathrm{Im}\Delta \times [0,1] \to \mathbb{T}^3$ continuous

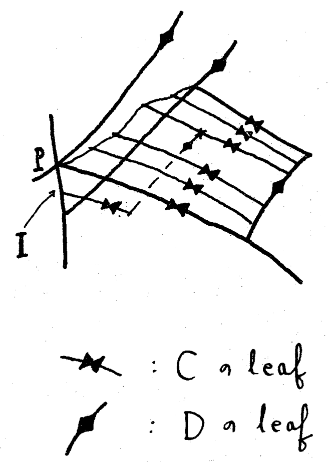
a) $\Gamma | \mathrm{Im}\Delta \times 0 = identity$,

b) $^{\forall}q \in \mathrm{Im}\Delta$ に対して、$\Gamma(q \times [0,1])$ は D のある leaf に含まれる,

c) $^{\exists}I \subset \mathbb{T}^3$ smooth curve through p, 各点で E に接している,

$\Gamma(\Delta(0\times[0,1))) = I$,

$\Gamma(\mathrm{Im}\Delta \times 1) \subset \bigcup_{q \in I} q$ をとおる C の leaf,



Remark 2. C, D は ϕ に連続的に depend するので "点 p において non-integrable" という性質は small perturbation のもとでは不変である。

Theorem 1. $C \oplus D$ が $\mathbb{T}^3$ の各点で non-integrable ならば ϕ は ergodic である。

Remark 3. "$\mathbb{T}^3$ 上に十分細く分布した有限個の

点で non-integrable" という仮定だけで Theorem は成立.

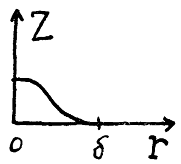
Theorem の証明は次の§で与えるとして,
non-integrable $C \oplus D$ をもつ ϕ の例を考えよう.
$\zeta : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ volume preserving, identity に十分近い diffeomorphism, を次のように定めて, $\phi = \zeta \circ \phi_0$ とおく.

$\phi_0 = \alpha \times id$, $\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ Anosov であったことを思い出す.
α が fixed points p, q をもつと仮定する. すると平行四辺形 $P \subset \mathbb{T}^2$ が存在して, 各辺は (un)stable manifold of p or q の部分集合, P の4つの頂点のうち p, q が向いあう2つの頂点, 残りの2つは heteroclinic points になる.
$\delta > 0$ 十分小として, $U_\delta(p), U_\delta(q) \subset \mathbb{T}^2$ を考える, ここで $U_\delta(p), U_\delta(q)$ は夫々, p, q を中心, 半径 δ の開円板をあらわす.
$U_\delta(p) \cap U_\delta(q) = \phi$, $U_\delta(p)$ は p 以外の P の頂点を含まない, $U_\delta(q)$ は q 以外の P の頂点を含まない. そこで $Z : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ を 0 に十分近い smooth function で

1) $\mathrm{supp}(Z) \subset U_\delta(p) \cup U_\delta(q)$,

2) $Z|_{U_\delta(p)}$, $Z|_{U_\delta(q)}$ は夫々, 中心 p, q からの距離 r だけに depend し, r の関数として図のようなもの, とする. そして求める

$$\zeta : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$$



を

$$\zeta(x, y, z) = (x, y, z + Z(x, y))$$

と定義する. $\phi = \zeta \circ \phi_0$ が求める性質をもつことが確められる.

§3. Proof of Theorem (概略)

簡単のため, E は *smooth* と仮定する. すると E を $\dim 1$ の *foliation* を定義する. $\mathbb{T}^3$ の点 p をとおる, C, D, E の *leaves* を夫々 $L_C(p)$, $L_D(p)$, $L_E(p)$ とあらわす.
さて, $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ が ϕ-*invariant* とする. i.e., $f(\phi(w)) = f(w)$ for $^\forall w \in \mathbb{T}^3$. Anosov [Steklov (1967)] によると $^\exists A \subset \mathbb{T}^3$, $mes(\mathbb{T}^3 - A) = 0$,

almost every leaf L *of* C (*or* D) に対して

1) $A \cap L \underset{full}{\subset} L$, i.e., $mes_L(L - A \cap L) = 0$,

2) f は $A \cap L$ では ある *constant* に等しい.

ところが $C \oplus D$ の *non-integrability* より

almost every leaf L *of* E に対しても 上の 1), 2) が成立する.

ことがわかる. そこで

$$A_1 = \left\{ p \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \cap L_C(p) \underset{full}{\subset} L_C(p),\ A \cap L_D(p) \underset{full}{\subset} L_D(p) \\ A \cap L_E(p) \underset{full}{\subset} L_E(p) \end{array} \right\}$$

とおくと $mes(\mathbb{T}^3 - A_1) = 0$. 更に,

$$A_2 = \{ p \in A_1 \mid A_1 \cap L_C(p) \underset{full}{\subset} L_C(p), \cdots\cdots \}$$

$$A_3 = \{ p \in A_2 \mid A_2 \cap L_C(p) \underset{full}{\subset} L_C(p), \cdots\cdots \}$$

を考える. すると $mes(\mathbb{T}^3 - A_3) = 0$.

今，$p \in A_3$ に対して continuous imbedding

$$\Delta : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{T}^3 \ , \quad \Delta(0,0) = p ,$$
$$\Delta(0 \times [-1,1]) \subset \text{leaf of } D, \ \Delta([-1,1] \times t) \subset \text{leaf of } C.$$

を考える．簡単のため Δ が smooth と仮定すると

$$\mathrm{Im}\,\Delta \cap A_3 \underset{full}{\subset} \mathrm{Im}\,\Delta$$

が意味をもち，そして $\mathrm{Im}\,\Delta \cap A_3$ 上で f は constant．さらに $\mathrm{Im}\,\Delta \cap A_2$ の点をとおる E の leaf 上で f は almost everywhere constant．よって f は p の nbd で almost everywhere constant．従って $\mathbb{T}^3$ でそうである．ϕ の ergodicity が証明された．

§4. ϕ は almost Anosov ?

ϕ に対して $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}_+$ を次のように定義する：

$$f(p) = \frac{\|\phi_* v\|}{\|v\|} \ , \quad v \in E_p \ (= E \text{ の } p \text{ 上の fibre}), \ v \neq 0$$

（ f は $\phi_* : E \to E$ の，各点での倍率をあらわす.）

continuous function $\log f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}$ に対して，Birkhoff エルゴード定理より $\exists H \subset \mathbb{T}^3$, $\mathrm{mes}(H) = 1$,

$\forall p \in H$ に対して.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log f(p) + \cdots + \log f(\phi^{N-1}(p)) \right\}$$

が存在し，ϕ が ergodic ならば $\int_{\mathbb{T}^3} \log f \ dxdydz$ に等しい．

ところが $v \in E_p$, $v \neq 0$, に対して

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\|\phi_*^N v\|}{\|v\|}\right)^{\frac{1}{N}} = \lim_{N\to\infty}\left(f(p)\cdot f(\phi(p))\cdots f(\phi^{N-1}(p))\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \exp \frac{1}{N}\left\{\log f(p) + \cdots + \log f(\phi^{N-1}(p))\right\}$$

$$= \exp \int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dxdydz$$

従って, ergodic な ϕ に対して もし

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{T}^3} \log f \, dxdydz \neq 0$$

のとき, ϕ は H 上で "Anosov" になっている. このとき ϕ を "almost Anosov" とよびたいが, (*) をみたす ϕ の example が 今のところ見つからない.